Complex Systems Engineering

Spieltheorie

Prof. Dr. Christin Seifert

6. Dezember 2017

University of Passau, WS 2017/2018

Überblick

Einführung

Marktstrategiespiel

- Die Geschäftsführung eines Unternehmens muss entscheiden, wie stark sie sich nächstes Jahr im Markt engagiert.
- Es gibt 4 Strategien (gering, mittel, stark, sehr stark) - je stärker, desto höher ist das benötigte Budget.
- Erfolg (Gewinn) hängt von der Konkurrenzsituation ab.
- Das Entscheidungsproblem kann als Matrix dargestellt werden (Gewinne sind z.B. Ergebnis einer Marktforschung).

		Konkurrenzsituation		
		günstig	**normal**	**ungünstig**
Engagmnt.	**gering**	5	3	1
	mittel	14	10	0
	stark	30	5	-5
	sehr stark	12	9	-9

Einführungsbeispiel

- Mögliche Lösungsansätze[1]
  - Wahrscheinlichkeiten für Auftreten der jeweiligen Konkurrenzsituationen schätzen und dann die eigene Strategie mit dem höchsten Erwartungswert wählen
  - Worst-Case-Anname: die für die Geschäftsführung schlechteste Konkurrenzsituation annehmen und dann die eigene Strategie so wählen, dass sie das Ergebnis maximiert (Maximin-Prinzip)
- Es wird angenommen, dass die Umwelt (Konkurrenzsituation) gegeben und nicht beeinflussbar ist

Definition (Klassische Entscheidungstheorie)

Die klassische Entscheidungstheorie betrachtet ausschließlich Situationen, in denen gegen die *Natur*, d.h. etwas Unbeeinflussbares, gespielt wird [1].

[1] Unvollständige Liste

Einführungsbeispiel

- Im Beispiel der Konkurrenzsituation auf dem Markt, ist die Umwelt nicht nicht beeinflussbar, also beeinflussbar
- Die Mitbewerber können strategisch überlegen, was ihre beste Entscheidung ist und somit ihre Entscheidungen auf das erwartete Verhalten unserer Geschäftsführung abstimmen

Definition (Spieltheorie)

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit Entscheidungssituationen, in denen das Ergebnis für einen Entscheidenden auch von den Entscheidungen anderer abhängt. Spieltheorie ist eine *Theorie sozialer Interaktionen* [1].

- Der Begriff Spiel ist historisch begründet, die ersten Arbeiten beschäftigten sich mit Gesellschaftspielen
- Spieltheorie hat nichts mit Spielen im eigentlichen Sinne zu tun, sondern mit strategischen Entscheidungssituationen

Definition (Strategisches Spiel)

Eine Entscheidungssituation, in der mehrere *rationale* Entscheidende Einfluss auf das Ergebnis haben und ihre *eigenen Interessen* verfolgen, nennt man strategisches Spiel, strategische Interaktion oder strategischen Konflikt [1].

- Anzahl der Spielenden unbegrenzt, man spricht von n-Personenenspielen

Definition (Lösung eines Spiels)

Die Lösung eines Spiels ist ein Vorschlag, wie das Spiel zu spielen ist.
Ein Lösungskonzept ist eine Anweisung, wie in einer Klasse von Spielen die Lösung zu ermitteln ist [1].

- Lösung und Lösungskonzept leitet sich nur aus den Eigenschaften des Spiels ab
- Man geht von rationalen, egoistischen Spieler*innen aus und fragt, wie man das Spiel unter den gegebenen Regeln (Eigenschaften des Spiels) spielen soll, um den maximalen Erfolg zu erzielen

- 1838 Analyse des Homo oeconomicus (rational agierender Mensch, der nutzenmaximierend agiert), erste spieltheoretische Ansätze, aber keine gesamte Theorie
- 1944 formale Analyse von Gesellschaftsspielen und Min-Max-Theorem von John von Neumann

Abbildung 1: John von Neumann (Public Domain, via Wikimedia Commons)

- John Forbes Nash, US-Amerikanischer Mathematiker, begründete in den 40er Jahren die Spieltheorie (Filmbiographie „A beautiful mind“)
- 1994 Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für die nichtkooperative Spieltheorie für John F. Nash, Reinhard Selten und John Harsanyi
- Insgesamt bisher 8 Nobelpreise für spieltheoretische Ansätze

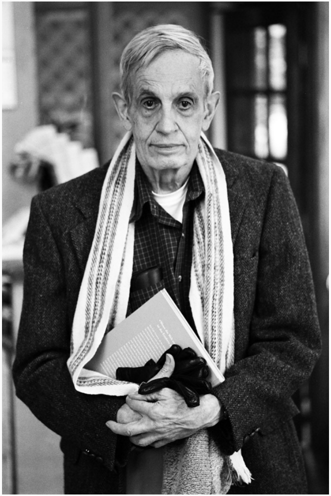


Abbildung 2: John Nash im Jahr 2000 (CC-SA 3.0, Peter Badge, via Wikimedia Commons)

Dominierte Strategien

		Konkurrenzsituation		
		günstig	**normal**	**ungünstig**
Engagmnt.	**gering**	5	3	1
	mittel	14	10	0
	stark	30	5	-5
	sehr stark	12	9	-9

- Unabhängig davon, was die Konkurrenz macht, ist die Strategie „sehr stark"immer schlechter als die Strategie „mittel"$\rightarrow$ die Strategie ist dominiert von einer anderen
- Es gibt keinen rationalen Grund jemals die Strategie „sehr starkes"Engagement zu wählen

Lösungsstrategien – Dominanzkriterium

Definition (Strikte Dominanz)

A und B seien strategische Alternativen eines Spielenden. Eine Alternative A dominiert eine Alternative B, wenn in jedem Umweltzustand A *besser* ist als B.

Definition (Schwache Dominanz)

A und B seien strategische Alternativen eines Spielenden. Eine Alternative A dominiert eine Alternative B, wenn in jedem Umweltzustand A *mindestens gleich gut* ist wie B.

- Beispiel für schwache Dominanz, Alternative „sehr stark“ist schwach dominiert

		Konkurrenzsituation		
		günstig	**normal**	**ungünstig**
Eng.	**mittel**	14	10	0
	sehr stark	12	10	0

Lösungsstrategien – Dominanzkriterium

- Man kann schwach dominierte Alternativen aus der Alternativliste streichen (Eliminination)
- Elimination schwach dominierter Lösungen schließt jedoch nur wenige Lösungen aus, und ist daher ein *schwaches Lösungskonzept*
- Schwache Lösungskonzepte lassen viele Verhaltensweisen offen und sind daher oft nicht zielführend

Lösungen mit Hilfe des Dominanzkriteriums

Beschreibung Knopfdruckspiel

- Zwei Spielende müssen unabhängig voneinander einen Knopf drücken, dabei kann Anton kann oben oder unten; Berta rechts oder links drücken
- Gewinnpunkte in 10.000 Euro siehe Matrix, der erste Wert pro Zelle bezieht sich auf Anton, der zweite auf Berta

		B(erta)	
		links	**rechts**
A(nton)	**oben**	(2,1)	(9,0)
	unten	(1,-1)	(9,8)

Lösungsstrategien – Dominanzkriterium

Knopfdruckspiel:

		B(erta)	
		links	**rechts**
A(nton)	**oben**	(2,1)	(9,0)
	unten	(1,-1)	(9,8)

Erinnerung: Es ist nicht wichtig, besser zu sein, als der/die Andere, es geht darum, die eigene Auszahlung zu maximieren.

Lösung mittels Dominanzkriterium:

- Spielerin B hat keine dominierten Strategien
- Spieler A: Strategie „unten“wird von Strategie „oben“schwach dominiert
- Spieler A kann daher eine Strategie streichen

		B	
		links	**rechts**
A	**oben**	(2,1)	(9,0)

- Da das Spielerin B auch weiß, wählt sie die für sie dann optimale Strategie „links“

Lösungsstrategien – Dominanzkriterium

		B(erta)	
		links	**rechts**
A(nton)	**oben**	(2,1)	(9,0)
	unten	(1,-1)	(9,8)

- Wahl des Dominanzkriteriums führt zu einer Lösung, in der der Gesamtgewinn der Spielenden nicht maximal ist, die Lösung „unten rechts“ hätte zu einem höheren Gewinn für beide geführt
- Lösung ist nicht intuitiv, aber die beste Lösung, die man *unabhängig voneinander* treffen kann (**nicht-kooperativ**)
- In einem kooperativen Setting (d.h. Spielende dürfen vorher miteinander verhandeln, setzen einen Vertrag auf und halten sich an den Vertrag) lässt sich die Lösung verbessern

Vereinfachtes Cournout-Spiel

- Zwei Marktkonkurrenten müssen entscheiden, wie stark sie sich auf dem Markt engagieren wollen
- Annahme: nach dem Jahr wird die Firma geschlossen (es gibt keine Reaktionen im nächsten Jahr auf die Entscheidung für das betrachtete Jahr)

		Der Andere		
		a (gering)	**b (mittel)**	**c (stark)**
Wir	**1 (gering)**	(18,18)	(15,19)	(9,21)
	2 (mittel)	(19,15)	(16,16)	(11,15)
	3 (stark)	(21,9)	(15,11)	(9,9)

Gedankenexperiment:

- Der Andere und wir bilden ein Kartell und sprechen uns ab, dass wir beide uns nur gering engagieren (Strategiekombination 1a, Gewinn (19,19)).
- Wir glauben, der Andere ist nett und naiv und hält sich an die Abmachung.
- Daraufhin beschließen wir, uns stark zu engagieren, da dadurch unser Gewinn größer wird (Strategiekombination 3a, Gewinn 21).
- Der Andere denkt sich dasselbe (Annahme, dass beide halbwegs clever sind), und so enden wir bei 3a (Gewinn (9,9)).
- Somit zerstört sich Strategie 1a von selbst, weil beide Grund haben, sich anders zu entscheiden, wenn sie annehmen, dass der Andere sich an die Abmachung hält.

Strategien, die sich nicht selber zerstören (d.h. für die es für beide keine bessere Alternative gibt), heißen *strategisches Gleichgewicht* oder *Nash-Gleichgewicht*.

Lösungsstrategien – Nash-Gleichgewicht

Definition (Nash-Gleichgwicht)

Das Nash-Gleichgewicht, auch strategisches Gleichgewicht genannt, ist eine Strategiekombination, bei der keiner der Spielenden einen Anreiz hat, als Einziger abzuweichen [1].

- Das Nash-Gleichgewicht ist die Kernidee der Spieltheorie.
- Nicht jedes Spiel hat notwendigerweise genau ein Nash-Gleichgewicht, das Konzept reicht also nicht, um eine eindeutige Lösung zu finden.
- Illustration der Idee in einem Video „Why do competitors open their stores next to one another?“: `https://www.youtube.com/watch?v=jILgxeNBK_8` [4:06 Minuten].

Bimatrix-Spiele

Bimatrix-Spiele

- Einfache Spiele mit minimaler Anzahl Strategien und Spielenden
- Viele Konzepte der Spieltheorie lassen sich mit ihnen bereits erklären
- In Matrixform darstellbar: 2x2 Matrix entspricht jeweils 2 Strategien pro spielender Person
- Beispiel mit Spieler A (Anton) und Spielerin B (Berta):

		B	
		b1	**b2**
A	**a1**	0	0
	a2	0	0

- Viele Spiele können auf wenige Strategien vereinfacht werden, indem die Strategien in Klassen eingeordnet werden und helfen komplexe Spiele zu analysieren

Gefangenendilemma (Prisoner's Dilemma)

- Zwei Ganov*innen begehen gemeinsam einen Diebstahl und werden gefasst, es gibt jedoch keine Beweise
- Der Gefägnisdirektor unterbreitet folgendes Angebot:
  - Jede/r kann gestehen oder leugnen.
  - Gesteht nur eine/r, kommt diese/r als Kronzeuge frei, der/die andere bekommt 5 Jahre.
  - Gesteht keine/r erhalten beide eine Strafe (1 Jahr) wegen unerlaubten Waffenbesitzes.
  - Gestehen beide, so erhalten beide 4 Jahre.
- In Matrixform, mit $a_{ij} = 5-$ Strafe, damit Gewinne aufscheinen:

		B	
		leugnen	**gestehen**
A	**leugnen**	(4,4)	(0,5)
	gestehen	(5,0)	(1,1)

Bimatrix-Spiele – Gefangenendilemma

Lösungen

- Dominierte Strategien
  - Strategie *leugnen* wird von *gestehen* dominiert, Gewinnkombination pro Person von (4,0) ist schlechter als (5,1)
  - Rationale Lösung ist also die Strategiekombination *(gestehen, gestehen)*
- Nash-Gleichgewicht
  - Nur die Strategie *(gestehen, gestehen)* befindet sich im Gleichgewicht, in allen anderen Fällen, würde sich der für eine Person vergrößern, wenn sie abweicht
- Lösung nicht ganz intuitiv, weil alle wissen, dass es eine bessere Lösung *(leugnen, leugnen)* geben würde, wenn beide SICHER kooperieren
- Soziales Dilemma: Für die Gruppe wäre es besser, wenn beide leugnen, aber für jeden Einzelnen ist es besser, von der Gruppenstrategie abzuweichen und zu gestehen

Schwarzmarkthändler-Dilemma

- Zwei Handelnde auf dem Schwarzmarkt, die sich nicht kennen, wollen Waren austauschen.
- Ausgemacht ist eine Kofferübergabe (ohne Kontrolle des Inhaltes wegen Zeitdrucks) zu einem bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort.
- Jeder/m Handelnden ist der Inhalt des eigenen Koffer 1 Einheit wert, der Inhalt des anderen 4 Einheiten.
- Soll man den eigenen Koffer mit Ziegelsteinen füllen?

		B	
		Ware	**Ziegel**
A	**Ware**	(3,3)	(-1,4)
	Ziegel	(4,-1)	(1,1)

Lösungen

- Lösung analog zum Gefangenendilemma, allerdings nicht unintuitiv, wie beim Gefangenendilemma.
- Beide Personen müssen die Strategie *Ziegel* spielen, da sie sich nicht trauen können (immerhin sind sie Gangster).
- Das Spiel ist so konstruiert, dass Kooperation unmöglich ist (Forschungsrichtung Mechanismusdesign).

Bimatrix-Spiele – Koordinationsspiele

Reines Koordinationsspiel

- Zwei Personen suchen sich in der Menschenmenge und haben zwei mögliche Treffpunkte ausgemacht. Gewinnen beide, wenn sie am gleichen Treffpunkt sind und sich finden. Verlieren, wenn sie an unterschiedlichen Treffpunkten sind.
- Zwei Personen telefonieren, Gespräch wird unterbrochen. Personen müssen sich koordinieren, um das Gespräch wieder aufzunehmen (Koordination: nur eine/r darf anrufen)).

		B	
		b1	**b2**
A	**a1**	(1,1)	(0,0)
	a2	(0,0)	(1,1)

Bimatrix-Spiele – Koordinationsspiele

Win-Win-Spiel

- Koordinationsspiel mit einer, von beiden Spielenden bevorzugten Strategie.

		B	
		b1	**b2**
A	**a1**	(2,2)	(0,0)
	a2	(0,0)	(1,1)

- Zwei strikte Gleichgewichte: *(a1,b1)* und *(a2,b2)*.
- Lösung nicht einfach, weil die Strategiekombination *(b2,a2)* auch ein Nash-Gleichgewicht ist, aber weniger Gewinn einbringt als *(a1,b1)* und es keine dominierten Strategien gibt.

Bimatrix-Spiele – Koordinationsspiele

Hirschjagd-Spiel

- Zwei Jäger*innen gehen Jagen, entweder Hirsch oder Hasen.
- Einen Hasen kann jede/r allein erlegen, einen Hirsch müssen sie gemeinsam erlegen.
- Es ist nicht möglich, gleichzeitig Hirsch und Hase zu jagen.

		B	
		Hirsch	**Hase**
A	**Hirsch**	(9,9)	(0,1)
	Hase	(1,0)	(1,1)

- Zwei strikte Gleichgewichte: *(Hirsch,Hirsch)* und *(Hase,Hase)*.
- Zusätzliche Eigenschaft: Auch ohne Kooperation kann man einen Gewinn schaffen.

Lösungskonzepte für Koordinationsspiele

- Es gibt keine dominierten Strategien, das Dominanzkriterium ist somit nicht anwendbar.
- Nash-Gleichgewicht:
    - Bei Koordinationsspielen gibt es immer zwei Nash-Gleichgewichte.
    - Mit Hilfe dieses Konzeptes kann man nur vorhersagen, dass ein Gleichgewicht gespielt wird, aber nicht welches. [2]

[2] Es kann *nicht-spieltheoretische Gründe* geben, sich auf eine der beiden Strategien (ohne Absprache) zu einigen. Wenn im reinen Koordinationspiel als Treffpunkte Universität und Börse ausgemacht waren, wird man annehmen, dass sich zwei Studierende an der Universität treffen. Solche nicht-spieltheoretischen Gründe betrachten wir hier nicht weiter.

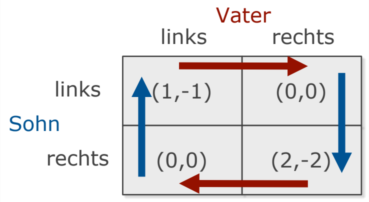
Vater-Sohn-Spiel

- Vater versteckt Goldmünze in einer Hand.
- Sohn muss raten, in welcher Hand die Münze ist.
- Rät der Sohn richtig und es ist die linke, bekommt er die Münze.
- Rät der Sohn richtig und es ist die rechte, bekommt er zwei Münzen.
- Rät der Sohn falsch, bekommt er nichts.

		Vater	
		links	**rechts**
Sohn	**links**	(1,-1)	(0,0)
	rechts	(0,0)	(2,-2)

Bimatrix-Spiele – Diskoordinationsspiele

- Spiel ist ein Diskoordinationsspiel, da ein Spieler (Sohn) versucht, auf ein Verhalten zu koordinieren, der andere Spieler (Vater) versucht, Koordination zu verhindern.
- Spiel hat keine Lösung, dies kann man sehen, indem man ein Abweichungsdiagramm zeichnet:



  - $\rightarrow$ wenn Vater weiß, was Sohn spiel, weicht er in Richtung des roten Pfeiles ab.
  - $\rightarrow$ wenn Sohn weiß, was Vater spiel, weicht er in Richtung des blauen Pfeiles ab.
- Keine zwei Pfeile zeigen auf genau ein Matrixfeld, d.h. es gibt keine Lösung

Definition (Gemischte Strategien)

Eine gemischte Strategie ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die reinen Strategien einen Spielers [1].

- Spielende wählen nicht die Strategie selber, sondern eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- Entsprechend dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung wird dann entschieden, welche Strategie im konkreten Spiel gespielt wird.

Vater-Sohn-Spiel in allgemeiner Form

- 2 Spielende S_1 und S_2, jeweils mit 2 möglichen Strategien l und r

		S_2	
		l_2	r_2
S_1	l_1	(a, α)	(b, β)
	r_2	(c, γ)	(d, δ)

Bimatrix-Spiele – Diskoordinationsspiele

- Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 Strategie l_2 spielt
- Sei q die Wahrscheinlichkeit, dass Spielerin 1 Strategie l_1 spielt
- Auszahlungsmatrix für Spieler 1:

		S_2	
		l_2 (p)	r_2 $(1-p)$
S_1	l_1 (q)	$q{\cdot}p{\cdot}a$	$q{\cdot}(1-p){\cdot}b$
	r_2 $(1-q)$	$(1-q){\cdot}p{\cdot}c$	$(1-q){\cdot}(1-p){\cdot}d$

- Gewinn von Spielerin 1 ist die Summe aller Zellen

$$G_1(p,q) = pqa + q(1-p)b + (1-q)pc + (1-q)(1-p)d$$

- Spieler 1 will G_1 maximieren, hat aber nur Einfluss auf q:
  $\frac{\partial G_1}{\partial q} = ap + (1-p)b - pc - (1-p)d \overset{!}{=} 0 \Rightarrow p = \frac{d-b}{a-b+d-c}$
- Analoge Rechnung für Spieler 2 $\Rightarrow q = \frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha+\gamma-\delta}$

- Mit Zahlenwerten aus dem Vater-und-Sohn-Spiel (Folie 27) ergibt sich
$$p = \frac{2}{3},\ q = \frac{2}{3}$$
- D.h. der Vater würde mit Wahrscheinlichkeit 2/3 die linke Hand wählen (weil die ihn im Falle eines Verlustes weniger kostet).
- Sohn sagt linke Hand mit Wahrscheinlichkeit 2/3 voraus, da der Vater diese entsprechend häufiger wählt.

Nullsummenspiel

- In einem Nullsummenspiel ist die Summe der Gewinne für jede Strategiekombination gleich Null, d.h. was der eine Spieler gewinnt, verliert die andere Spielerin.

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(1,-1)	(0,0)
	a_2	(0,0)	(1,-1)

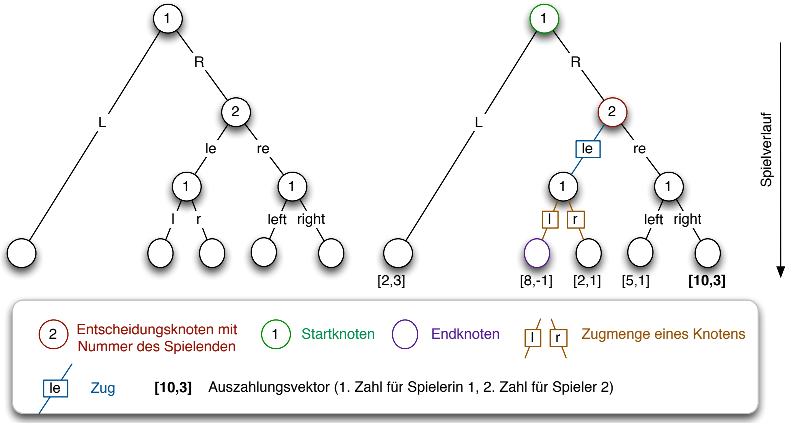
- Es gibt keine Möglichkeit zur Kooperation (auch nicht mit Absprache).
- Zweipersonen-Nullsummenspiele heißen *streng kompetitive* oder *antagonistische* Spiele.
- Vater-Sohn-Spiel auf Folie 27 ist ein Nullsummenspiel[3].

[3] Nullsummenspiele sind jedoch nicht notwendigerweise Diskoordinationsspiele

Grundbegriffe

Spielbaumdarstellung

- Spezialform der extensiven Spielform



Zug Entscheidung, die eine Spielerin im Spielverlauf an einem Entscheidungsknoten trifft

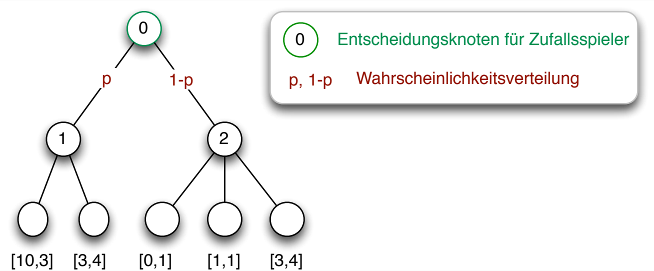
Partie Abfolge von Zügen vom Startknoten zu Endknoten

Endknoten Knoten ohne Entscheidungen, jeder Endknoten entspricht einem Spiel

Endliches Spiel ein Spiel mit einer endlichen Anzahl Spielerinnen, wobei jede Spielerin eine endliche Anzahl von Zügen hat

- Ein Spielbaum ist ein Baum aus der Graphentheorie (zusammenhängend, keine Kreise, ausgezeichneter Wurzelknoten).
- Ein Spielbaum ist eine Untermenge der extensiven Spielform, z.B. können unendliche Spiele nicht in der Form dargestellt werden.

- Zufall wird als eigener Spieler (Natur, Zufallsspieler) dargestelt
- Der Knoten bekommt die Nummer 0
- Im Beispiel wird Spielerin 1 mit Wahrscheinlichkeit p den nächsten Zug machen und Spieler 2 mit Wahrscheinlichkeit $p - 1$



Definition (Extensive Spielform)

Eine extensive Spielform umfasst folgende Angaben, sogenannte *Regeln* für ein Spiel:

- Menge der Spieler und deren Zugreihenfolge
- Menge der möglichen Züge zu jedem Spielzeitpunkt
- Auszahlungen an alle Spieler für jede Partie
- Informationsstand aller Spieler zu jedem Entscheidungszeitpunkt
- Zeitpunkte, Wahrscheinlichkeiten und Korrelationen für Zufallsspieler

- Informationsstände beschreiben, was jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt des Spieles weiß
- Das Hirschjagd-Spiel (s. Folie 25) kann nicht adäquat mit einem Spielbaum dargestellt werden, da eigentlich beide Spieler gleichzeitig spielen.

		B	
		Hirsch	**Hase**
A	**Hirsch**	(9,9)	(0,1)
	Hase	(1,0)	(1,1)

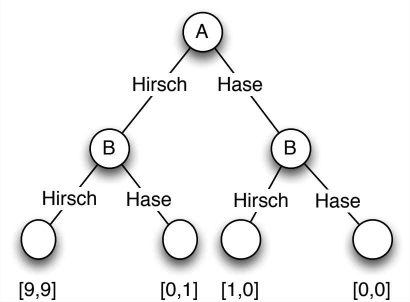


Abbildung 3: Darstellung eines entarteten Hirschjagd-Spiels

- Zusammenfassung einer Menge von Knoten zu einer Einheit (sog. Informationsbezirk)
- Spielerin weiß nur, dass sie sich in einem der Knoten aus dem Informationsbezirk befindet, jedoch nicht in welchem

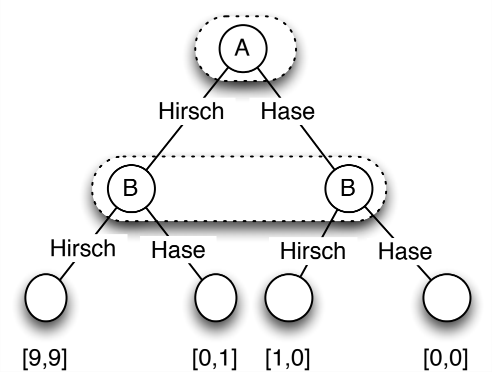


Abbildung 4: Hirschjagd-Spiel mit Informationsbezirken

- Informationsbezirke müssen Knoten mit gleich vielen Zügen enthalten. Andernfalls kann eine Spielerin aus der Anzahl möglicher Züge schließen, in welchem Knoten sich sich genau befindet.

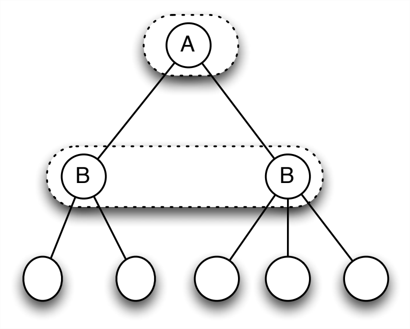


Abbildung 5: Spiel mit unzulässigem Informationsstand

Definition (Spiel mit perfekter Information)

In einem Spiel mit perfekter Information kennt jede Spielerin alle vorangegangenen Züge (die eigenen und die der Gegenspieler). Alle Informationsbeszirke enthalten genau einen Knoten (Bsp. Abbildung 3, Schach).

Definition (Spiel mit imperfekter Information)

In einem Spiel mit imperfekter Information gibt es mindestens einen Informationsbezirk mit mehr als einem Knoten (Bsp. Abbildung 4, Skat).

Definition (Common Knowledge)

Eine Information ist Common Knowledge, wenn alle Spieler sie wissen und die anderen Spieler wissen, dass sie sie wissen usw. Beispiele für Common-Knowledge: Regeln des Spieles, Zerlegung in Informationsbezirke. Auch *gemeinsames Vorwissen* genannt.

Grundbegriffe – Strategien

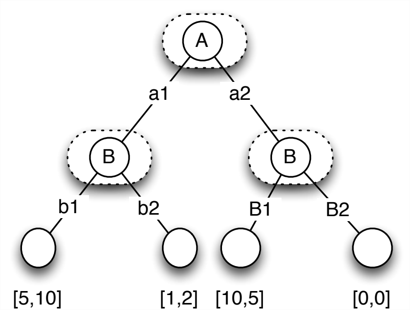


Abbildung 6: Beispielspiel, 2 Spieler ziehen hintereinander

- Strategie ist ein vollständiger Plan des eigenen Vorgehens
- Strategiemenge (alle möglichen Strategien) für Spieler A: $S_A = \{(a_1), (a_2)\}$
- Strategiemenge (alle möglichen Strategien) für Spielerin B: $S_B = \{(b_1, B1), (b_1, B_2), (b_2, B_1), (b_2, B_2)\}$

Definition (Strategie)

Eine Strategie einer Spielerin ist ein vollständiger Plan ihres Vorgehens. D.h. sie enthält eine Entscheidung (Zug) für jeden Informationsbezirk.

Definition (Strategiemenge)

Eine Strategiemenge eines Spielers ist die Menge aller seiner möglichen Strategien.

Definition (Normalform / strategische Form)

Die Normalform eines Spiels umfasst alle Strategiekombinationen aller Spielenden und die entsprechenden Auszahlungen. Bei 2 Spielern ergibt sich eine Bimatrix-Darstellung.

- Die Normalformdarstellung des Spieles aus Abbildung 6

		B			
		(b_1, B_1)	(b_1, B_2)	(b_2, B_1)	(b_2, B_2)
A	(a_1)	(5,10)	(5,10)	(1,2)	(1,2)
	(a_2)	(10,5)	(0,0)	(10,5)	(0,0)

- Nach Umbenennung der Strategien

		B			
		s_1^B	s_2^B	s_3^B	s_4^B
A	s_1^A	(5,10)	(5,10)	(1,2)	(1,2)
	s_2^A	(10,5)	(0,0)	(10,5)	(0,0)

- In der Normalform ist die Reihenfolge der Züge nicht mehr erkennbar
- Die Normalform besteht nur noch aus einem Zug pro Spieler

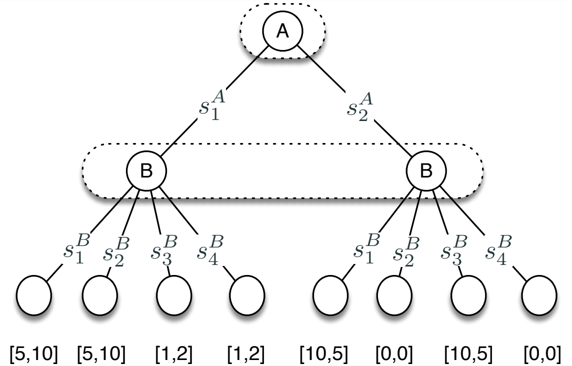


Abbildung 7: Aus Normalform in extensive Spielform rückübersetztes Spiel aus Abbildung 6

Lösungskonzepte

Lösungskonzepte

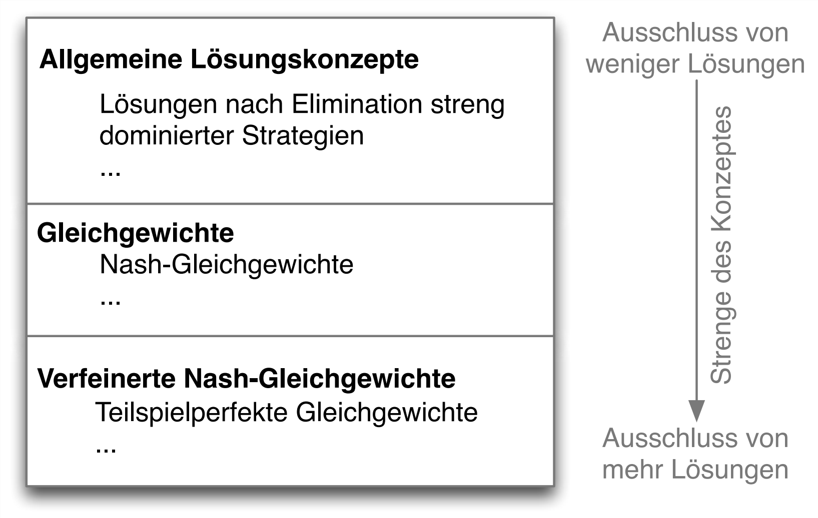


Abbildung 8: Überblick über Lösungskonzepte (Auswahl)

Aufgabe

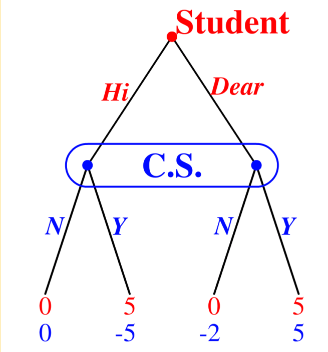
Modellieren Sie das folgende Spiel (Email-Spiel) in Extensiver Spielform und Matrixform[4].

- Eine Studentin kann einen Professor entweder mit 'Hi' oder 'Dear' in einer Email anschreiben. In beiden Fällen kann sie entweder eine Antwort oder keine Antwort bekommen. Wenn sie eine Antwort erhält, dann hat diese in jedem Fall den Wert 5. Wenn sie keine Antwort erhält, ist der Gewinn für sie 0.
- Für den Professor gilt folgendes: Beginnt die Email mit 'Hi' und und er schreibt keine Antwort, dann ist sein Gewinn 0. Beginnt die Email mit 'Hi' und und er schreibt eine Antwort, dann ist sein Gewinn -2 (da er sich ärgert und trotzdem geantwortet hat). Beginnt die Email mit 'Dear' und er antwortet, dann ist sein Gewinn 5. Antwortet er auf Emails mit "Dear"nicht, ist sein Gewinn -2 (da er ein schlechtes Gewissen hat).
- Gehen Sie davon aus, dass die Strategien der beiden Spielenden gleichzeitig gewählt werden müssen.

[4] Über den Realitätsgehalt des Spieles wird hier keine Aussage getroffen.

Aufgabe

Student \ C.S.	N	Y
Hi	0, 0	5, -5
Dear	0, -2	5, 5



Lösungskonzepte – Notation

- $i \in I$ Spielerindex. n Anzahl der Spielenden.
- s_i^j Strategie j der Spielerin i.
- $S_i = \{s_i^j\}$ Strategiemenge der Spielerin i.
- $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ Strategieraum des Spieles (Menge aller möglichen Strategien aller Spielenden).
- $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ Strategievektor (jeder Spieler hat eine Strategie gewählt).
- $s_{-k} = (s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_n)$ Strategievektor ohne Strategie s_k („Verhalten der anderen Spieler“).
- $(\tilde{s}_k, s_{-k}) = (s_1, \ldots, s_{k-1}, \tilde{s}_k, s_{k+1}, \ldots, s_n)$ Strategievektor, bei dem s_k durch $\tilde{s}_k$ ersetzt wurde (ein Spieler ändert seine Strategie)

Definition (Spiel in Normalform)

Ein Spiel in Normalform ist vollständig beschrieben durch folgende Angaben

- Die Menge der n Spielerinnen I
- Jede Spielerin muss $s_i \in S_i$ wählen
- Der Strategievektor ergibt sich aus den Wahlen der einzelnen Spielerinnen $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = S_1 \times \ldots \times S_n$
- Jeder Spielausgang hat einen bestimmten Nutzen für Spielerin i, d.h. es existiert Abbildung $u_i : S \to \mathbb{R}, s \to u_i(s)$
- $u(s) = (u_i(s), \ldots, u_n(s))$ enthält alle zu erwartenden Auszahlungen bei Spielausgang

Beispiel

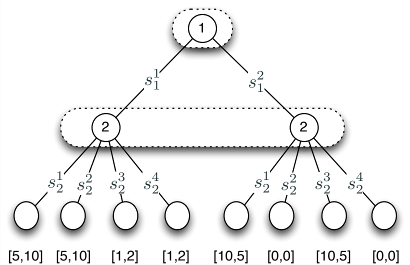


Abbildung 9: Spiel in extensiver Form aus Abbildung

- $I = \{1, 2\}$, $n = 2$
- $S = \{s_1^1, s_1^2\} \times \{s_2^1, s_2^2, s_2^3, s_2^4\}$
- Beispiel Strategievektor $s = (s_1^2, s_2^3)$
- $u(s) = (10, 5)$
- $u_1(s) = 10$, $u_2(s) = 5$

Definition (Beste Erwiderung)

Eine Strategie $s_i^* \in S_i$ eines Spielers i heißt beste Erwiderung auf das Verhalten s_{-i} der Gegenspieler, wenn gilt

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i$$

- D.h., gegeben eine feste Wahl der Gegenspieler ist bei Wahl von s_i^* der Gewinn von Spielerin i größer oder gleich als der Gewinn bei Wahl von jedem anderen s_i.
- Es kann mehrere beste Antworten geben ($\geq$).

Definition (Dominanz)

Eine Strategie $s_i^* \in S_i$ eines Spielers i dominiert seine Strategie $s_i \in S_i$, wenn gilt

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \text{ und}$$
$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \text{ für mindestens ein } s_{-i}$$

- D.h. es führt immer zu mindestens der gleichen Auszahlung, wenn Spielerin i die Strategie s_i^* statt s_i wählt, **egal,** was die Gegenspieler spielen UND für mindestens eine Wahl der Gegenspieler ist der Gewinn mit Strategie s_i^* größer als mit Strategie s_i.

Definition (Strenge Dominanz)

Eine Strategie $s_i^* \in S_i$ eines Spielers i dominiert seine Strategie $s_i \in S_i$ streng, wenn gilt

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i}$$

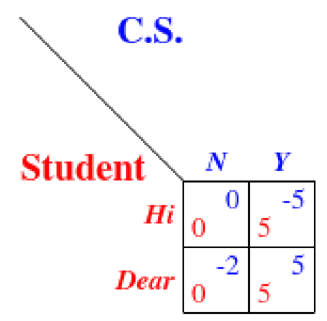
- D.h. Strategie s_i^* führt immer zu einer besseren Auszahlung für Spielerin i als Strategie s_i (egal, was die Gegenspieler spielen).

Beispiel Knopfdruckspiel (siehe Folie 12)

		2	
		s_2^1	s_2^2
1	s_1^1	(2,1)	(9,0)
	s_1^2	(1,-1)	(9,8)

- $u_2(s_2^1, s_{-2}) = (1, -1)$ und $u_2(s_2^2, s_{-2}) = (0, 8)$, d.h. keine Strategie von Spielerin 2 dominiert eine andere von ihr
- $u_1(s_1^1, s_{-1}) = (2, 9)$ und $u_1(s_1^2, s_{-1}) = (1, 9)$, d.h. Strategie s_1^1 dominiert Strategie s_1^2
- Strategie s_1^2 kann aus dem Spiel eliminiert werden (untere Zeile der Matrix wird gestrichen).
- Spielerin 2 wählt dann die Strategie, die u_2 maximiert
- Lösung des Spiels ist Strategiekombination (s_1^1, s_2^1)

Lösen Sie das Email-Spiel mit Hilfe dominanter Strategien.



- C.S. - keine dominante Strategie
- Student - keine dominante Strategie

$\rightarrow$ Spiel mit Hilfe dominanter Strategien nicht lösbar

Data: gameMatrix
Result: gameMatrix without dominated strategies
repeat
    dominatedRows = $\emptyset$;
    dominatedCols = $\emptyset$;
    for *i=1 to rows* **do**
        for *j=i+1 to rows* **do**
            `/* for dominance criterion see slide 53 */`
            if s_i *dominates* s_j **then**
                dominatedRows $\cup\{j\}$
        end
    end
    for *i=1 to cols* **do**
        for *j=i+1 to cols* **do**
            if s_i *dominates* s_j **then**
                dominatedCols $\cup\{j\}$
        end
    end
    gameMatrix.removeRows(dominatedRows);
    gameMatrix.removeCols(dominatedCols);
until *(dominatedRows* $\cup$ *dominatedCols)* $\neq \emptyset$;

Lösungskonzepte – Dominierte Strategien

- Dominante Strategien müssen nicht notwendigerweise existieren für ein Spiel.
- Dominante Strategien können wiederholt eliminiert werden.
- Bei abwechselnder, wiederholter Elimination von dominanten Strategien *kann* die Lösung von der Reihenfolge der Spielenden abhängen.

Definition (Nash-Gleichgewicht)

Ein Strategievektor $s^* = (s_1^n*, \dots s_n^*)$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:

$$u_i(s*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

für alle Spieler i und alle Strategien $s_i \in S_i$.
Ein Strategievektor $s^* = (s_1^*, \dots s_n^*)$ heißt striktes Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:

$$u_i(s^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

für alle Spieler i und alle Strategien $s_i \in S_i, s_i \neq s_i^*$.

Beispiel Knopfdruckspiel (siehe Folie 12)

		2	
		s_2^1	s_2^2
1	s_1^1	(2,1)	(9,0)
	s_1^2	(1,-1)	(9,8)

1. Betrachte alle Spalten einzeln: Markiere jede beste Erwiderung des anderen Spielers (d.h. die größte, links stehende Zahl) auf diese Spalte mit [.
2. Betrachte alle Zeilen einzeln: Markiere jede beste Erwiderung des anderen Spielers (d.h. die größte, rechts stehende Zahl) auf diese Zeile mit].
3. Alle Zellen, die vollständig geklammert sind, sind Nash-Gleichgewichte.

Lösungskonzepte – Nash-Gleichgewicht

1. Betrachtung der Spalten

[(2,1)	[(9,0)
(1,-1)	[(9,8)

2. Betrachtung der Zeilen

[(2,1)]	[(9,0)
(1,-1)	[(9,8)]

3. Strategiekombinationen (s_1^1, s_2^1) und (s_2^1, s_2^2) sind Nash-Gleichgewichte

Alternativ ist eine Lösung mittels Abweichungsdiagramm wie im Vater-Sohn-Spiel auf Folie 28 möglich (und ähnlich zum vorgestellten Lösungsweg).

Lösen Sie das Email-Spiel mit Hilfe von Nash-Gleichgewichten.

Student \ C.S.	N	Y
Hi	0, 0	5, -5
Dear	0, -2	5, 5

(Hi/No) und (Dear/Yes) sind zwei Nash-Gleichgewichte.

- Nash-Gleichgewicht ist eine sinnvolles Lösungskonzept bei einmaligem Spielen, z.B. würde man im Schwarzmarkt-Spiel (siehe Folie 21) bei wiederholtem Tauschen auf dem Schwarzmarkt wohl keine Ziegelsteine in die Koffer stecken.
- Spielen mit Wiederholungen wären allerdings anders modelliert, die Spielwiederholungen wären in den Spielregeln angegeben (siehe extensive Normalform).

Definition (Satz von Nash, 1951)

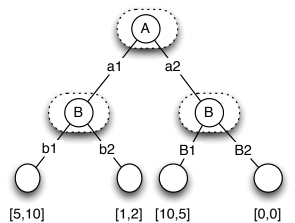
In jedem Spiel mit endlicher Strategiemenge existiert mindestens ein Nash-Gleichgewicht, wenn man gemischte Strategien zulässt.

Definition (Satz von Wilson, 1971)

In jedem Spiel mit endlicher Strategiemenge existiert *fast immer* (mit Wahrscheinlichkeit 1) eine ungerade Anzahl von Nash-Gleichgewichten (in reinen oder gemischten Strategien).

Lösungskonzepte – Teilperfektes Gleichgewicht

Beispiel aus Abbildung 6 mit 3 Nash-Gleichgewichten:



	(b_1, B_1)	(b_1, B_2)	(b_2, B_1)	(b_2, B_2)
(a_1)	(5,10)	**(5,10)**	(1,2)	(1,2)
(a_2)	**(10,5)**	(0,0)	**(10,5)**	(0,0)

- $s = (a_1, b_1, B_2)$ ist nur im Gleichgewicht, weil Spielerin B so damit droht, ihre Strategie B_2 zu spielen, falls Spieler A mit dem Zug a_2 das für ihn günstigere Gleichgewicht anstrebt.
- Die durch $s = (a_1, b_1, B_2)$ vorgegebene Partie verläuft aber immer entlang a_1, b_1, somit ist die Wahl von B_2 in dem Fall eine **implizite Drohung** (Die sie wahr machen würde, falls durch irgendeinen Zufall das Spiel in den rechten Entscheidungsknoten gelangen würde und sich dort *neu entscheiden könnte*).
- Idee ist, solche Gleichgewichte auszuschließen.

Definition (Teilspiel)

Ein Teilspiel ist ein Teil eines extensiven Spieles, das für sich genommen, ein vollständiges Spiel darstellt. D.h. es beginnt mit einem einzelnen Entscheidungsknoten und enthält alle Nachfolger; kein Knoten des Teilspiels darf einem Informationsbezirk angehören, der nicht in dem Teilspiel ist.

- Ein Spiel ist Teilspiel von sich selbst.
- Ein Teilspiel kann ein Einpersonen-Spiel sein.
- Ein Teilspiel, das kleiner ist als das Ausgangsspiel, heißt echtes Teilspiel.

Definition (Teilspielperfektes Gleichgewicht)

Ein Nash-Gleichgewicht ist genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn die Gleichgewichtsbedingung in jedem Teilspiel erfüllt ist.[5]

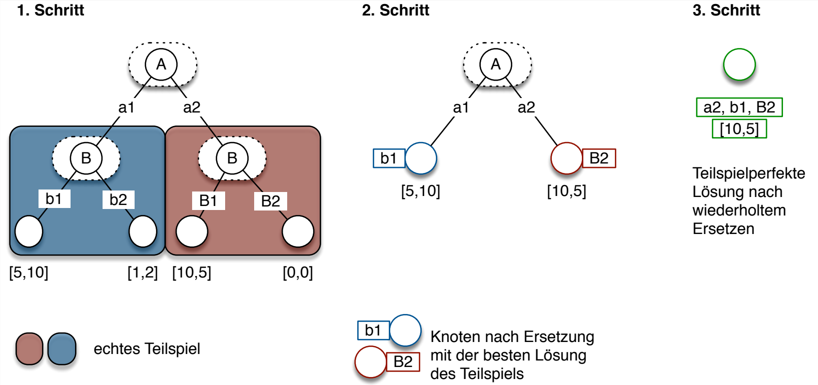
[5] Definition nur sinnvoll in extensiver Spielform.

Finden von teilspielperfekten Gleichgewichten mittels
Rückwärtsinduktion

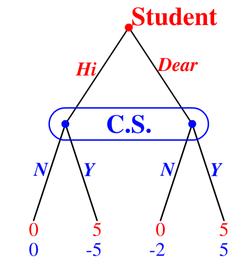
1. Beginne mit den „kleinsten“ Teilspielen (d.h. den Spielen, deren Entscheidungsknoten sich am nächsten zu Endknoten befinden)
2. Für jedes Teilspiel
   - Bestimme für jeden Entscheidungsknoten die beste Aktion
   - Ersetzte den Entscheidungsknoten mit dieser Aktion und der zugehörigen Auszahlung
   - D.h. hier werden die Entscheidungen fixiert (und so getan, als wäre der Teilbaum kein Spiel mehr)
3. Wiederhole für diesen Spielbaum, bis man am Start angekommen ist, übrig bleiben die teilperfekten Gleichgewichte

- Bemerkung: Verfahren komplizierter, wenn die Strategien in den Teilspielen nicht strikt dominant sind (das betrachten wir hier jedoch nicht).

Beispiel


1. Schritt
A
a1
a2
B
b1
b2
B
B1
B2
[5,10]
[1,2]
[10,5]
[0,0]
echtes Teilspiel
2. Schritt
A
a1
a2
b1
B2
[5,10]
[10,5]
b1
B2
Knoten nach Ersetzung
mit der besten Lösung
des Teilspiels
3. Schritt
a2, b1, B2
[10,5]
Teilspielperfekte
Lösung nach
wiederholtem
Ersetzen

Lösen Sie das Email-Spiel mit Hilfe von teilperfekten Gleichgewichten. Gehen Sie bei der Lösung davon aus, dass Spielerin C.S. weiß, in welchem Knoten sie sich befindet, d.h. Strategien werden nacheinander, nicht gleichzeitig gespielt (anders als der Informationsbezirk in der Abbildung).



Lösung (Dear/YES)

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Mit Hilfe der Spieltheorie lassen sich komplexe Entscheidungsprobleme mit mehreren Entscheidern modellieren.
- Anwendungen z.B. in der Wirtschaft, in der Biologie (Kampf oder Flucht Verhalten), in der Polititk.
- Nash- und teilspielperfekte Gleichgewichte sind gute Lösungen, aber nicht hinreichend für alle Szenarien.
- Online-Version zum Lösen von einfachen Spielen `http://gametheoryexplorer.org` (Achtung, Flash)

Zusammenfassung

Knofpdruckspiel (siehe Folie 12) mit

`http://gametheoryexplorer.org`

		2	
		s_2^1	s_2^2
1	s_1^1	(2,1)	(9,0)
	s_1^2	(1,-1)	(9,8)

Programmausgabe:

```
EE = Extreme Equilibrium, EP = Expected Payoffs
Rational:
EE 1 P1: (1) 9/10 1/10 EP= 9 P2: (1) 0 1 EP= 4/5
EE 2 P1: (2)    0    1 EP= 9 P2: (1) 0 1 EP=   8
EE 3 P1: (3)    1    0 EP= 2 P2: (2) 1 0 EP=   1
```

- Zwei Gleichgewichte in reinen Strategien (EE 2 und EE 3), sowie ein Gleichgewicht in gemischten Strategien (EE 1) (siehe Satz von Wilson).

Zusammenfassung

Wichtige Konzepte

- Strategische Normalform
- Extensive Spielform
- Spielbaumdarstellung
- Strategie
- Informationsbezirk
- Gemischte Strategie
- Dominante Strategie
- Nash-Gleichgewicht
- Teilspielperfektes Gleichgewicht
- Rückwärtsinduktion auf Spielbäumen

Weiterführende Literatur

- Spieltheorie – Eine Einführung
  Zusätzliche Ressourcen, Diskussionen auf `http://www.spieltheorie.de/`
  Christian Rieck. *Spieltheorie – Eine Einführung*. Christian Rieck Verlag, 2016

Literatur

[1] Christian Rieck. *Spieltheorie – Eine Einführung*. Christian Rieck Verlag, 2016.